Travaux dirigés: Série 1 - Eléctricité II

September 11, 2014

Abstract

Université Mohammed V — **Année Universitaire 2014-2015**
Faculté des Sciences — **SMP: S3**

Electricité II
Travaux Dirigés: Série 1

Exercice I : *Rappels et complements mathématiques*

1) Gradient d'une fonction scalaire,
a) Donner $\operatorname{grad} V = \vec{\nabla} V$ en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques,
b) En déduire l'expression de $\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$,
2) Divergence d'un vecteur,
Donner $\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{E}$ en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques,
3) Rotationnel d'un vecteur,
a) Donner $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ en coordonnées cartésiennes,
b) En déduire : (i) $\vec{\nabla} \wedge \operatorname{grad} V$, (ii) $\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right)$,
4) Calcul intégral,
a) Donner le théorème de Green Ostogradsky reliant une intégrale triple à une intégrale double,
b) Donner le théorème de stokes reliant une intégrale double à une simple.

Exercice II: *champ $\vec{B}$ crée par une boucle de courant*

Un courant d'intensité I circule dans une spire circulaire de centre O et de rayon R. On se propose de calculer le champ d'induction magnétique $\vec{b}\,(M)$ crée au point M de l'axe $\overrightarrow{Oz}$ de la spire.
1) Par des considérations de symétrie, déterminer:
a) Les variables dont dépend $\vec{b}\,(M)$,
b) La direction de $\vec{b}\,(M)$,
2) A l'aide de la loi de Biot et Savart, déterminer:
a) L'expression du champ $\vec{b}\,(M)$ en fonction de z,
b) L'expression de $\vec{b}\,(M)$ en l'angle α,
3) En déduire la valeur du champ:
a) Au centre de la spire, point $z = 0$,
b) Dans la limite z tend vers l'infini,
4) Un enroulement de spires jointives identiques d'épaisseurs très faibles vis-à-vis des rayons des spires constitue une *bobine plate.*
a) Déduire de la question précédente le champ d'induction $\vec{B}\,(z)$ de la bobine,
b) Justifier la réponse,
5) Calculer circulation de $\vec{B}\,(z)$ le long de tout l'axe $\overrightarrow{Oz}$

Exercice III: *champ $\vec{B}$ crée par un solénoide*

Un solénoïde $\mathbb{S}$ *fini* est constitué d'un enroulement d'un fil conducteur autour d'un cylindre d'axe Δ que nous prenons $\overrightarrow{Oz}$. Le fil, parcouru un courant permanent I, est suffisamment mince permettant d'imaginer le solénoïde comme une juxtaposition continue de spires coaxiales de rayon R d'axe $\overrightarrow{Oz}$,

1) Faire un schéma illustratif, on notera les angles limites α_1 et α_2,

2) Si pour une épaisseur dz autour du point P du solénoïde, nous avons N spires ; donner la densité dn de spires par unité de longueur du solénoide,

3) On se propose de calculer le champ d'induction *sur l'axe* du solénoide,

a) Donner l'expression du champ élémentaire $\overrightarrow{dB}$ en fonction de $\vec{b}\,(z)$,

b) Calculer le champ total $\vec{B}\,(z)$ en fonction de α_1 et α_2,

4) En déduire la valeur du champ pour le cas d'un solénoide infini

Exercice IV: *champ $\vec{B}$ et potentiel vecteur $\vec{A}$*

On considère un conducteur cylindrique homogène de base circulaire de rayon R et de longueur L *supposée grande (*L tendant vers l'infini*)*. Ce conducteur est parcouru par un courant volumique axial d'intensité I et de densité volumique $\vec{j} = j\vec{e}_z$.

1) Par des considérations de symétrie, déterminer:

a) Les variables dont dépend l'induction magnétique $\vec{B}\,(M)$,

b) La direction de $\vec{B}\,(M)$,

c) Vérifier que div $\vec{B} = 0$,

2) Déterminer l'expression du champ $\vec{B}\,(M)$ en tout point de l'espace,

3) Déterminer les variables dont dépend le potentiel vecteur $\vec{A}\,(M)$,

4) Déterminer la direction de $\vec{A}\,(M)$,

5) Vérifier que div $\vec{A} = 0$,

6) A partir de la relation $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$, déterminer l'expression de $\vec{A}\,(M)$ en tout point de l'espace,

7) En déduire la constante d'intégration pour la condition $\vec{A}\,(\rho = R)$.

Solution

Exercice I: *Rappels et compléments mathématiques*

1) Gradient d'une fonction scalaire

(a) en coordonnées cylindriques

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$$

en coordonnées sphériques

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

(b) En déduire l'expression de grad $\left(\frac{1}{r}\right)$

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{e}_r}{r^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

2) Divergence d'un vecteur

(a) en coordonnées cylindriques

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho E_\rho\right)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

en sphériques

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 E_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta E_\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{\partial E_\varphi}{r\sin\theta\partial\varphi}$$

(b) a priori

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(1\right)}{\partial r} = 0!$$

mais ceci n'est vrai que pour $r \neq 0$. Pour $r = 0$, cette quantité diverge; en effet on sait que pour le champ électrostatique $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$, on a:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \neq 0$$

ce qui conduit à:

$$\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\frac{\varrho}{q}, \qquad \varrho = q\delta\left(r\right), \quad \text{avec } \delta \text{ distribution de Dirac}$$

3) Rotationnel d'un vecteur

(a) Donner $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ en coordonnées cartésiennes

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} rot\,(\mathrm{grad}\,V) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} V = \vec{0} \\ \mathrm{div}\left(rot\ \vec{A}\right) &= 0 \end{aligned}$$

4) relations de Stokes

$$\begin{aligned} \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{E} d\tau &= \iint_{\Sigma=\partial V} \vec{E}.\overrightarrow{dS} &&: \text{ Relation 1: Green-Ostogradsky} \\ \iint_S rot \vec{B}.\overrightarrow{dS} &= \oint_{C=\partial S} \vec{B}.\overrightarrow{dl} &&: \text{ Relation 2: Stokes} \end{aligned}$$

<u>**Exercice II**</u>**:** *champ $\vec{B}$ crée par une boucle de courant*

pour des détails voir section 4.2 du cours

1) $i)$ $\vec{b} = \vec{b}\,(z)$, $ii)$ $\vec{b} = b\,(z)\,\vec{e}_z$

2) loi de Biot et Savart

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{b} &= \frac{\boldsymbol{\mu}_0 I \sin^3 \alpha}{2R} \vec{e}_z \\ &= \frac{\boldsymbol{\mu}_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z \end{aligned}}$$

3) valeur du champ:

(a) Au centre de la spire: point $z = 0$

$$\vec{b} = \frac{\boldsymbol{\mu}_0 I}{2R} \vec{e}_z$$

(b) Dans la limite z tend vers l'infini

$$\vec{b} \to \vec{0}$$

4) *bobine plate.*

Le champ $\vec{B}$ est obtenu par application du

principe de superposition

c'est à dire que le champ total $\vec{B}\,(z)$ créé par la bobine est la somme des champs créés par chacune des N spires: $N\vec{b}$

$$\begin{aligned}\vec{B}\,(z) &= \tfrac{\mu_0 NI}{2R}\sin^3\alpha\;\vec{e}_z \\ &= \tfrac{\mu_0 NI}{2R}\tfrac{b^3}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\;\vec{e}_z\end{aligned}$$

5) circulation de B le long de tout l'axe $\overrightarrow{Oz}$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} Bdz &= \int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{\mu_0 NI}{2}\tfrac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\tfrac{\mu_0 NI}{2R}\sin^3\alpha\right)dz\end{aligned}$$

Ensuite utilisons les relations

$$\begin{aligned}\sin^3\alpha &= \tfrac{R^3}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \tan\alpha &= \tfrac{R}{z} \\ z &= \tfrac{R}{\tan\alpha} = R\cot\alpha = R\tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ dz &= \tfrac{-R}{\sin^2\alpha}d\alpha\end{aligned}$$

et les bornes

$$\begin{aligned}z = -\infty &\iff \alpha = \pi^- \\ z = \infty &\iff \alpha = 0^+\end{aligned}$$

pour

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} Bdz &= \int_{\pi^-}^{0^+}\left(\tfrac{\mu_0 NI}{2R}\sin^3\alpha\right)\tfrac{-R}{\sin^2\alpha}d\alpha \\ &= -\tfrac{\mu_0 NI}{2}\int_{\pi^-}^{0^+}\sin\alpha d\alpha \\ &= \tfrac{\mu_0 NI}{2}\int_{\pi^-}^{0^+}d\left(\cos\alpha\right) \\ &= \tfrac{\mu_0 NI}{2}\left[\cos\alpha\right]_{\pi}^{0} \\ &= \mu_0 NI\end{aligned}$$

Exercice III: *champ $\vec{B}$ crée par un solénoide $\mathbb{S}$*

voir sous -section 4.3 du cours:

On considerera 2 cas:

- solénoide fini avec: $-z_1 < z < z_2$
  ou encore d'ouverture vu de M donnée par α_1, α_2,

- solénoide infini avec: $-\infty < z < \infty$
  ou encore $\alpha_1 = \pi$, $\alpha_2 = 0$.

1) *schéma illustratif*, voir fig

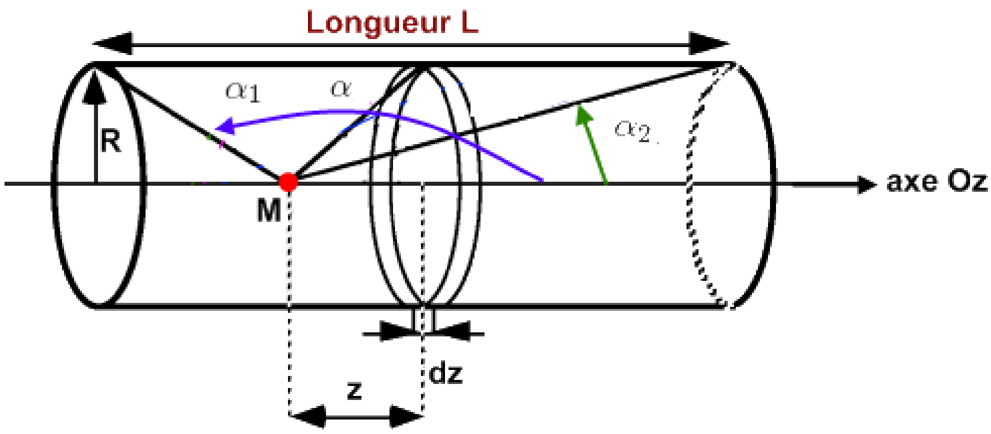


Figure 1: Induction magnétique créé par un solénoide d'axe $\overrightarrow{OZ}$

avec

$$dz = -\frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

2) densité dn de spires par unité de longueur du solénoide $\mathbb{S}$

Pour calculer le champ $\vec{B}$ créé par $\mathbb{S}$ en un point $M \in \overrightarrow{Oz}$, on suppose que:

i) le fil est suffisamment mince et imaginer:

> le solénoide $\mathbb{S}$ comme une juxtaposition *continue* de spires coaxiales $\mathcal{S}_i$ de rayon R d'axe $\overrightarrow{Oz}$,

ii) pour une épaisseur dz autour du point P du solénoide, nous avons N spires.

$$dz \quad \rightarrow \quad N \ spires$$

Cela veut dire que la densité dn de spires par *unité de longueur* du solénoide est

$$\frac{dn}{dz} = N \quad \Rightarrow \quad dn = Ndz$$

2 remarques:

✓ le solénoide $\mathbb{S}$ a donc les mêmes propriétés de symétrie que les spires $\mathcal{S}_i$.

✓ en fonction de l'angle α :

$$\tan\alpha = \frac{R}{z} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{R}{\tan\alpha} \quad \Rightarrow \quad dz = -\frac{Rd\alpha}{\sin^2\alpha}$$

d'ou

$$dn = -N\frac{Rd\alpha}{\sin^2\alpha}$$

3) (a) champ élémentaire: $d\vec{B}$

★ une spire $\mathcal{S}$, parcourue par I, créé un champ $\vec{b}$; càd:

$$1 \text{ spire } \mathcal{S} \quad \text{créé} \quad \vec{b} = \frac{\mu_0 I \sin^3\alpha}{2R}\vec{e}_z$$

★ une densité dn de spires autour de P créé en tout point M de $\overrightarrow{Oz}$ un champ $d\vec{B}$

$$dn \text{ spires} \quad \text{créé} \quad \begin{aligned} d\vec{B} &= \vec{b}dn \\ &= N\vec{b}dz \\ &= -N\vec{b}\frac{R}{\sin^2\alpha}d\alpha \end{aligned}$$

Remplaçons $\vec{b}$ par sa valeur, on a:

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= -\left(N \times \frac{\mu_0 I \sin^3\alpha}{2R}\vec{e}_z\right) \times \frac{R}{\sin^2\alpha}d\alpha \\ &= -\frac{\mu_0 NI}{2}\sin\alpha d\alpha\vec{e}_z \end{aligned}$$

(b) champ total: $\vec{B}$

$$\begin{aligned} \vec{B}(z) &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\vec{B} \\ &= -\vec{e}_z\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\mu_0 IN\sin^3\alpha}{2R} \times \frac{Rd\alpha}{\sin^2\alpha} = -\vec{e}_z\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\mu_0 IN}{2}\sin\alpha d\alpha \end{aligned}$$

d'ou

$$\vec{B}(z) = \mu_0 IN\frac{(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)}{2}\vec{e}_z$$

4) Solénoide *infini*: $\alpha_1 = \pi$, $\alpha_2 = 0$,

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 IN\ \vec{e}_z \\ &= \overrightarrow{cte} \end{aligned}$$

sur l'axe $\overrightarrow{Oz}$ le champ $\vec{B}$ est constant

Exercice IV: *champ $\vec{B}$ et potentiel vecteur $\vec{A}$*
schéma illustratif: voir fig 2

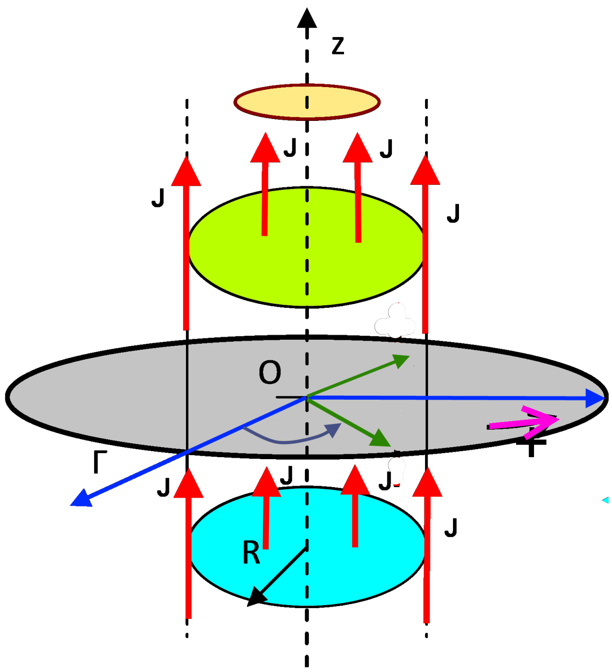


Figure 2: conducteur cylindrique parcouru par $J = je_z$. Coordonnées $M = (\rho, \varphi, z)$. Γ est la courbe d'Ampère.

1) *Propriétés de symétrie de $\vec{B}(M)$*

(a) symétrie cylindrique implique (ici L est supposé infini)

$$\vec{B} = \vec{B}(\rho)$$

(b) direction de $\vec{B}$: le plan

$$\Pi_s \equiv (\vec{e}_\rho, \vec{e}_z) \perp \vec{e}_\varphi \quad \textit{contenant } M$$

est un plan de symétrie du conducteur. Ceci implique

$$\vec{B} \perp \Pi_s \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{B} = B_\varphi(\rho)\,\vec{e}_\varphi$$

(c) calcul de div $\vec{B}$:
En coordonnées cylindriques, on a:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= \vec{\nabla}.\vec{B} \\ &= \frac{\partial(\rho B_\rho)}{\rho\partial\rho} + \frac{\partial B_\varphi}{\rho\partial\varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial B_\varphi}{\rho\partial\varphi} = 0 \text{ car } B_\varphi = B_\varphi(\rho) \text{ ne dépendant ni de } \varphi \text{ ni de z} \end{aligned}$$

2) *Expression du champ* $\vec{B}\,(M)$ en tout point de l'espace

★ le calcul se fait par le th d'Ampère (voir chap 2 pour plus de détails sur ce th)

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{B}.\overrightarrow{dl} \quad = \quad \mu_0 I \quad : \quad \text{Théorème d'Ampère}}$$

ou Γ est la courbe d'Ampère.

Dans notre cas, Γ est un cercle de rayon ρ passant par M

on a aussi

$$\begin{aligned} \vec{B} &= B\vec{e}_{\varphi} \\ \overrightarrow{dl} &= d\rho\vec{e}_{\rho} + \rho d\varphi\vec{e}_{\varphi} + dz\vec{e}_{z} \end{aligned}$$

soit

$$\vec{B}.\overrightarrow{dl} = \rho B d\varphi$$

Selon le choix de Γ on distingue deux cas:

a) $\rho > R$, b) $\rho < R$

<u>*i*) cas $\rho > R$</u>

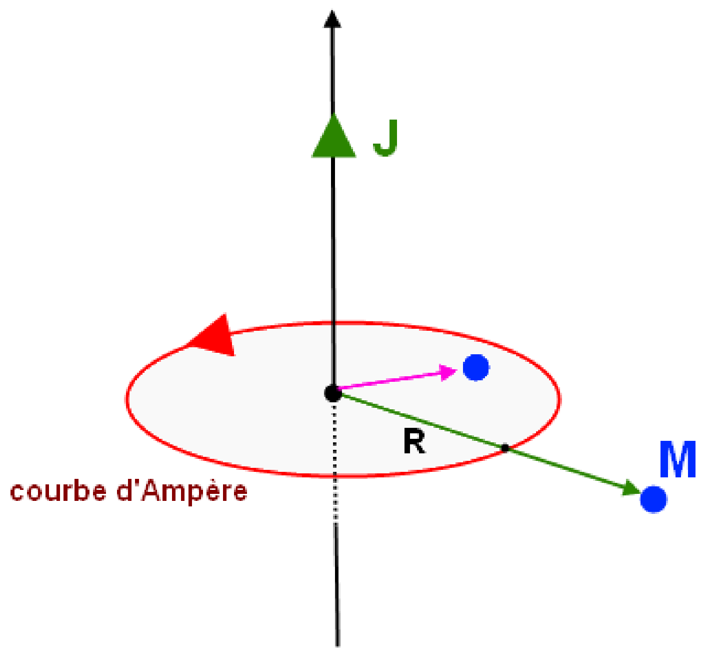


Figure 3: Courbe d'Ampère.

La courbe d'Ampère est:

un cercle de rayon ρ *passant par* M

Comme $\rho > R$, le courant traversant $\mathcal{S}$ délimitée par Γ est

$$I = \int_{\mathcal{S}} \overrightarrow{J}.\overrightarrow{dS} = \int_{\mathcal{S}} j \; dS$$

avec $\partial\mathcal{S} = \Gamma$ et

$$\begin{aligned} \overrightarrow{J} &= j \; \overrightarrow{e_z} \\ \overrightarrow{dS} &= dS \; \overrightarrow{e_z} \end{aligned}$$

d'ou

$$I = \int_{0 \leq \rho \leq R} j \; dS + \int_{\rho > R} \underbrace{j}_{=0} \; dS$$

et donc

$$I = j\pi R^2$$

Le théorème d'Ampère implique

$$\begin{aligned} \mu_0 I &= \oint_{C_\Gamma} \vec{B}.\overrightarrow{dl} \\ &= \oint_0^{2\pi} B\,(\rho d\varphi) \\ &= \rho B \oint_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi\rho B \end{aligned}$$

D'ou

$$\boxed{B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \quad \text{avec} \quad I = j\pi R^2}$$

<u>$ii)$ cas $\rho < R$</u>

Dans ce cas seule une partie du courant contribue car

$$\begin{aligned} I_{int} &= \textstyle\int_S \overrightarrow{J}.\overrightarrow{dS} = j \int_S dS, \qquad \partial S = \Gamma \\ &= j\pi\rho^2 \\ &= (j\pi R^2)\,\frac{\rho^2}{R^2} \\ &= I\,\frac{\rho^2}{R^2} \end{aligned}$$

le théorème d'Ampère donne

$$\begin{aligned} \mu_0 j\pi\rho^2 &= \mu_0 I\,\frac{\rho^2}{R^2} \\ &= \oint_{C_\Gamma} \vec{B}.\overrightarrow{dl} \\ &= \oint_0^{2\pi} B\,(\rho d\varphi) \\ &= 2\pi\rho B \end{aligned}$$

soit:

$$2\pi\rho B \quad = \quad \mu_0 I \tfrac{\rho^2}{R^2}$$

et donc

$$\boxed{B \quad = \quad \mu_0 I \tfrac{\rho}{2\pi R^2}}$$

3) *variables de* $\vec{A}(M)$:

symétrie cylindrique implique:

$$\vec{A} = \vec{A}(\rho)$$

il n'y a pas de variable z ni de variable φ

4) *direction de* $\vec{A}(M)$.

Le plan de symetrie Π_s implique

$$\vec{A} \in \Pi_s$$

càd qu'on a chercher 2 composantes.

Mais comme le plan

$$\Pi_a = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi) \quad \text{est un plan d'antisymétrie}$$

et que

$$\vec{A} \ \perp \ \ \Pi_a$$

on a

$$\boxed{\vec{A} = A(\rho)\ \vec{e}_z}$$

5) *Vérifier que* $\text{div}\,\vec{A} = 0$

$$\begin{aligned} \text{div}\,\vec{A} &= \vec{\nabla}.\vec{A} \\ &= \tfrac{\partial(\rho A_\rho)}{\rho\partial\rho} + \tfrac{\partial A_\varphi}{\rho\partial\varphi} + \tfrac{\partial A_z}{\partial z} = \tfrac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= 0, \quad \text{car ne dépend pas de } z \end{aligned}$$

6) Expression de $\vec{A}(M)$ en tout point de l'espace

A partir de

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

soit en éffectuant

$$\left| \begin{array}{l} B_\rho(\rho) = 0 \\ B_\varphi(\rho) \neq 0 \\ B_z(\rho) = 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial\rho} \\ \frac{\partial}{\rho\partial\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} A_\rho = 0 \\ A_\varphi = 0 \\ A_z \neq 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{\partial A_z}{\partial\rho} \\ 0 \end{array} \right.$$

soit

$$B_\varphi(\rho) = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \quad \Leftrightarrow \quad A_z = -\int B_\varphi d\rho$$

on distingue 2 cas

$$\begin{aligned} \alpha)\ \ \rho > R \quad &: \quad B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \\ \beta)\ \ \rho < R \quad &: \quad B_\varphi = \mu_0 I \frac{\rho}{2\pi R^2} \end{aligned}$$

α) $\underline{\rho > R}$

$$\boxed{A_z(\rho) \quad = \quad -\int \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} d\rho = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho + cte}$$

7) la condition sur $\vec{A}$ permet de déterminer la constante pour $\rho = R^+$

$$A_z(\rho = R) = 0 \quad \Rightarrow \quad cte = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln R$$

soit

$$\boxed{A_z(\rho) \quad = \quad -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln R = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho}{R}}$$

β) $\underline{\rho < R}$

$$A_z(\rho) \quad = \quad -\int \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R^2} d\rho = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \rho^2 + cte'$$

La condition sur $\vec{A}$ permet de déterminer la constante $\rho = R^-$

$$A_z(\rho = R) = 0 \quad \Rightarrow \quad cte' = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} R^2$$

soit

$$\begin{aligned} A_z(\rho) \quad &= \quad -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \rho^2 + \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} R^2 \\ &= \quad \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right) \end{aligned}$$